Propriétés des limites.

Unicité:

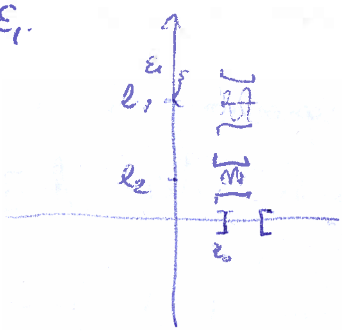
Proposition: ~~...~~ "la limite, quand elle existe, elle est unique".

Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ défini au voisinage d'un point généralisé ω.

Si $\exists \lim_{x\to\omega} f(x) \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, alors il est unique.

Preuve: Supposons que $\lim_{x\to\omega} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to\omega} f(x) = l_2$.

Faisons le cas $\omega = x_0^+$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Par définition de limite, ça veut dire que:



* - $\forall \varepsilon_1>0\ \exists \delta_1>0$ t.q. si $x_0<x<x_0+\delta_1 \Rightarrow |f(x)-l_1|<\varepsilon_1$.
- $\forall \varepsilon_2>0\ \exists \delta_2>0$ t.q. si $x_0<x<x_0+\delta_2 \Rightarrow |f(x)-l_2|<\varepsilon_2$

~~Don~~ Supposons $l_1 \neq l_2$ et fixons $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ assez petits, pour avoir que $|l_1-l_2| < \varepsilon_1+\varepsilon_2$, c'est à dire, $\underbrace{\{|y-l_1|<\varepsilon_1\}}_{I_1} \cap \underbrace{\{|y-l_2|<\varepsilon_2\}}_{I_2} = \emptyset$.

Soit δ_1, δ_2 donnés par *, et $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

alors pour $x_0 < x < x_0+\delta$ il faut avoir $|f(x)-l_1|<\varepsilon_1$, $|f(x)-l_2|<\varepsilon_2$,

c'est à dire, $y=f(x) \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$, absurde. □

Cas général: on a: $l_1, l_2 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

$\forall V_1$ voisinage de l_1, $\exists U_1$ voisinage épointé de ω t.q. $f(U_1) \subseteq V_1$.

$\forall V_2$ voisinage de l_2 $\exists U_2$ voisinage épointé de ω t.q. $f(U_2) \subseteq V_2$.

Si $l_1 \neq l_2$, on peut choisir V_1, V_2 t.q. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. alors on a.

$f(\underset{\neq\emptyset}{U_1 \cap U_2}) \subseteq f(U_1) \cap f(U_2) \subseteq V_1 \cap V_2 = \emptyset$ absurde. □

~~Limites à gauche/droite~~ :

Remarque : notons qu'on admet seulement comme valeurs limites $l \in \mathbb{R}$, $+\infty$ ou $-\infty$ et pas l^+, l^-.

En effet dans ce cas on a : $\lim_{x \to w} f(x) = l^+ \Rightarrow \lim_{x \to w} f(x) = l$:

~~Proposition : Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ définie au voisinage épointé d'un point généralisé w. Alors si $\exists\, l \in \mathbb{R}$ t.q. $f(x)$ tend à l^+ (ou l^-) pour $x \to w$, alors on a aussi que $\lim_{x \to w} f(x) = l$.~~

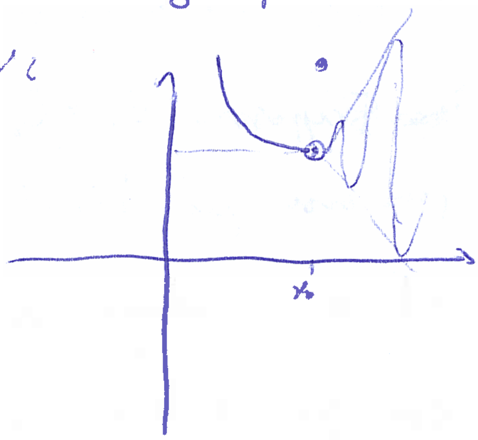
En effet, si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ voisinage épointé de w t.q. $f(U) \subseteq [l, l+\varepsilon[$

on a aussi que $f(U) \subseteq [l, l+\varepsilon[\subseteq]l-\varepsilon ; l+\varepsilon[$, donc $\lim_{x \to w} f(x) = l$.

Limites à gauche/à droite.

Proposition : Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage épointé de $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors : $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \eta$ si et seulement si :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \eta .$$



Preuve. ($\Rightarrow$) (pour $\eta = -\infty$) (en général) l'hypothèse veut dire :

$\forall V$ voisinage de η

$\forall M > 0$ $\exists \delta > 0$ t.q. $\underset{x \neq x_0}{|x - x_0| < \delta} \Rightarrow f(x) < -M$. ($f(x) \in V$.)

Mais alors pour le même δ, on a $x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M$ ($f(x) \in V$) (c'est à dire $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \eta$)

et $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M$ ($f(x) \in V$) (c'est à dire $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \eta$)

OK

($\Leftarrow$) (Pour $\eta = l \in \mathbb{R}$). (en général) L'hypothèse veut dire :

$\forall V$ voisinage de η

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_+ > 0$ t.q. $x_0 < x < x_0 + \delta_+ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ($f(x) \in V$) ($\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \eta$)

* et $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_- > 0$ t.q. $x_0 - \delta_- < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ ($f(x) \in V$) ($\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \eta$)

Donc $\forall \varepsilon$, soient δ_+ et δ_- donnés par $*$, et soit $\delta := \min\{\delta_+, \delta_-\} > 0$.

On a que $\forall x$, si $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$ $\Rightarrow$ $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ ($f(x) \in V$), c'est à dire $\lim_{x \to x_0} f(x) = \eta$. □

Exemple : $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1 & x < 1 \\ \pi & x = 1 \\ 2(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + 1 & x > 1 \end{cases}$ (dessin du graphe fait déjà)

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2(x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + 1 = 1$

$\lim_{x \to 1^-} (x-1)^2 + 1$ $\Rightarrow$ $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Limites et suites

Théorème : Soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ définie sur un voisinage épointé de ω un point généralisé. Alors :

$\lim_{x \to \omega} f(x) = \eta$ si et seulement si :

pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \to \omega$, et $u_n \neq \omega$ pour n assez grand, c'est à dire $\#\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = \omega\} < +\infty$), on a $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \eta$.

Preuve : $\Rightarrow$ (pour $\omega = x_0^-$, $\eta = +\infty$) (en générale)

Par hypothèse (*) : $\forall$ (V voisinage de η) ($\forall M > 0$) $\exists \delta > 0$ ($\exists U$ voisinage épointé de ω) tel que $x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M$ ($f(U) \subseteq V$)

Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \to \omega = x_0^-$ and $u_n \neq x_0$ pour $n >> 0$.

Par définition (**) $\forall$ (U voisinage de ω) $\forall \delta > 0$, $\exists N > 0$ t.q. $x_0 - \delta < u_n < x_0$ ($u_n \in U$) $\forall n > N$. ✓ on l'utilise.

Donc : $\forall M > 0$ ($\forall V$ voisinage de η), on considère δ donné par (*), et par (**) $\exists N > 0$ t.q. $x_0 - \delta < u_n < x_0$ ($u_n \in U$) $\overset{(**)}{\Rightarrow}$ $f(u_n) > M$ ($\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $f(u_n) \in V$) donc $\lim_{n \to \infty} f(u_n) = \eta$.

$\Leftarrow$ Supposons par absurde que $\lim_{x \to \omega} f(x) \neq \eta$.

(pour $\omega = x_0^-$, $\eta = +\infty$). (en général) c'est à dire :

$\exists M > 0$ tq $\forall \delta > 0$, $\exists x_\delta$: $x_0 - \delta < x_\delta < x_0$ et $f(x_\delta) \leq M$.

$\exists V$ voisinage de η tq $\forall U$ voisinage de ω, $\exists x_U \in U$, $f(x_U) \notin V$.

Prenons $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$: $\exists$ $u_n = x_{\frac{1}{n}}$ tq $x_0 - \frac{1}{n} < u_n < x_0$ et $f(u_n) \leq M$.
$(u_n \to x_0^-)$

c'est à dire, $\lim_{n \to \infty} f(u_n) \not\to +\infty$. absurde.

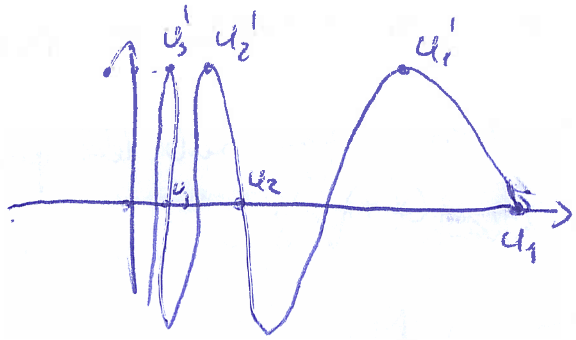
□

en général, U_n = base de voisinages de η ... tq.
$\exists u_n \in U_n$ t.q. $f(u_n) \notin V$.

Ce théorème est très utile comme critère pour montrer que une certaine limite n'existe pas.

Corollaire. Soit $f: D_f \to \mathbb{R}$ définie au voisinage d'un point généralisé ω.
Supposons $\exists (u_n)$: $u_n \to \omega$, $f(u_n) \to \eta$. $(\eta \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$
$\exists (u_n')$: $u_n' \to \omega$, $f(u_n') \not\to \eta$. (par exemple $\to \eta' \neq \eta$)

Alors f n'admet pas de limite en ω.



Exemple : $\lim_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas

$u_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0^+$ $\quad f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0$.

$u_n' = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0^+$, $\quad f(u_n') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$.

$f(u_n) \to 0 \quad f(u_n') \to 1 \quad 0 \neq 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0^+} \sin\frac{1}{x}$.

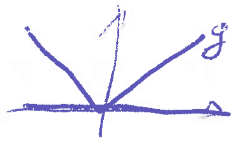
Limites et ordre.

Proposition Soient f, g : deux fonctions définies dans un voisinage épointé U d'un point ~~[illegible]~~ généralisé ω.

Supposons que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in U$. Alors ~~[illegible]~~ Si $\exists \lim_{x \to \omega} f(x) =: l_1$ et $\exists \lim_{x \to \omega} g(x) =: l_2$, on a $l_1 \leq l_2$.

Remarque : si $f(x) < g(x) \not\Rightarrow l_1 < l_2$ mais seulement $l_1 \leq l_2$.

Exemples : $f(x) = 0$, $g(x) = |x|$.



alors $f(x) < g(x)$ $\forall x \neq 0$, donc dans un voisinage épointé de 0. Mais $\lim_{x \to 0} 0 = 0 = \lim_{x \to 0} |x|$.

Exemples $f(x) = 0$, $g(x) = |\sin(\frac{1}{x})|$. $f(x) \leq g(x)$ $\forall x$ $\lim_{x \to 0} 0 = 0$,

mais $\nexists \lim_{x \to 0} |\sin(\frac{1}{x})|$.

Preuve : Cas $\omega = x_0$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$.

Par hypothèse : $\exists \delta_0 > 0$ tel que $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in]x_0 - \delta_0; x_0 + \delta_0[\setminus \{x_0\}$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$: $x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$. ($\Rightarrow l_1 - \varepsilon < f(x)$)

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_2 > 0$: $x \in]x_0 - \delta_2; x_0 + \delta_2[\setminus \{x_0\} \Rightarrow |g(x) - l_2| < \varepsilon$ ($\Rightarrow g(x) < l_2 + \varepsilon$.

On a donc : $\forall \varepsilon, \exists$, posons $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$, $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$,

on a $l_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x) < l_2 + \varepsilon$ donc $l_1 < l_2 + 2\varepsilon$.

Pour $\varepsilon \to 0$ on obtient $l_1 \leq l_2$. (si $l_1 \leq l_2 \Rightarrow l_1 < l_2 + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$)

si $l_1 < l_2 + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon$, supposons $l_1 > l_2$.

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ tq $l_1 - \delta > l_2$, et $l_1 > l_2 + \delta$, contradiction avec $l_1 < l_2 + 2\varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$. $\square$

Théorème (des gendarmes, ou du sandwich)

Soient f, g, h 3 fonctions définies au voisinage épointé d'un point généralisé ω ; et telles que, au voisinage de ω on ait $f \leq g \leq h$.

Si f et h admettent une limite finie l pour $x \to \omega$, alors g admet également l comme limite pour $x \to \omega$.

Preuve : On procède comme dans la proposition précédente, et on déduit que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U$ voisinage épointé de ω t.q. $l - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} g(x) = l$.

Théorème (des gendarmes à l'infini).

Soient f, g définies au voisinage d'un point généralisé ω ; et on $f \leq g$.

Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} g(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} f(x) = -\infty$.

Preuve, comme d'habitude, on a

$\forall M > 0$ $\exists U$ voisinage épointé de ω tq $M \leq f(x) \leq g(x)$, donc $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = +\infty$)

Exemple : $f(x) = x^2 + \sin \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. $x^2 + \sin \frac{1}{x} \geq x^2 - 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 + \sin \frac{1}{x} \geq \lim\limits_{x \to \infty} x^2 = +\infty$

Opérations sur les limites.

Multiplication par scalaire :

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} \lambda f(x) = \lambda \ell$.

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} \lambda f(x) = \begin{cases} +\infty & \lambda > 0 \\ -\infty & \lambda < 0. \end{cases}$

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} \lambda f(x) = \begin{cases} -\infty & \lambda > 0 \\ +\infty & \lambda < 0. \end{cases}$

Addition de deux fonctions :

f, g deux fonctions définies au voisinage de ω

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = \ell_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$.

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = \varepsilon\infty$ ($+\infty$ / $-\infty$) $\Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} (f(x) + g(x)) = \varepsilon\infty$ ($+\infty$ / $-\infty$). $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

- Si $\lim\limits_{x \to \omega} f(x) = \varepsilon_1\infty$; $\lim\limits_{x \to \omega} g(x) = \varepsilon_2\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to \omega} (f(x) + g(x)) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = +1 \\ -\infty & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1. \end{cases}$

$\to\ ?$ si $\boxed{\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2}$

forme indéterminée.

Exemples $\lim\limits_{x \to +\infty} \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{x} - \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(-1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to \infty} x^2 - (x^2 - 1) = \lim\limits_{x \to \infty} 1 = 1$.

Produit de deux fonctions

f, g définies au voisinage d'un point généralisé ω.

- Si $\lim_{x \to \omega} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to \omega} g(x) = l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \to \omega} (f \cdot g)(x) = l_1 \cdot l_2$

- Si $\lim_{x \to \omega} f(x) = \varepsilon_1 \infty$ $\lim_{x \to \omega} g(x) = \varepsilon_2 \infty \Rightarrow \lim_{x \to \omega} (f \cdot g)(x) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \infty$.

- Si $\lim_{x \to \omega} f(x) = l \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to \omega} g(x) = \varepsilon \infty \Rightarrow \lim_{x \to \omega} (f(x) g(x)) = \begin{cases} \varepsilon \infty & l > 0 \\ -\varepsilon \infty & l < 0 \\ ? & l = 0 \end{cases}$

Forme indéterminée $0 \cdot \infty$.

Exemples. - $\lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$.

- $\lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ ...

$\lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$ qui n'existe pas.

Composition de deux fonctions.

Soient f, g fonctions. f définie au voisinage de ω.

$\lim_{x \to \omega} f(x) = \eta_1$. g définie au voisinage de η.

$\lim_{x \to \eta} g(x) = \eta_2$, Alors $\lim_{x \to \omega} g \circ f(x) = \eta_2$

si $f(x) \neq \eta$ pour $x \in$ un voisinage épointé de ω, alors

Corollaire : Quotient de deux fonctions : $\frac{1}{f}$.

- si $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to\omega} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \ell \neq 0 \\ +\infty & \text{si } \ell = 0^+ \\ -\infty & \text{si } \ell = 0^- \end{cases}$

  $?$ si $0 \rightarrow \lim\limits_{x\to\omega} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty$.

- si $\lim\limits_{x\to\omega} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\omega} \frac{1}{f(x)} = 0^+$

  $-\infty \qquad\qquad 0^-$

  $\lim |f(x)| = +\infty \Rightarrow \lim \frac{1}{f(x)} = 0$.

Formes indéterminées :

$\infty - \infty, \; 0 \cdot \infty, \; \frac{0}{0}, \; \frac{\infty}{\infty}, \; 1^{\infty} \; \infty^0, \; 0^0$.

C13 - 10

$\lim_{\omega} (f+g)$		$\lim f$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{\omega} g$	l_2	l_1+l_2	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
	$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

$\lim \lambda f$		$\lim f$		
		l_1	$+\infty$	$-\infty$
λ	$\lambda > 0$	λl_1	$+\infty$	$-\infty$
	$\lambda = 0$	$\lambda l_1 = 0$	0	0
	$\lambda < 0$	λl_1	$-\infty$	$+\infty$

$\lim_{\omega} f \cdot g$		$\lim f$				
		$l_1 > 0$	$l_1 = 0$	$l_1 < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l_2 > 0$	$l_1 l_2$	$l_1 l_2 = 0$	$l_1 l_2$	$+\infty$	$-\infty$
	$l_2 = 0$	0	0	0	?	?
	$l_2 < 0$	$l_1 l_2$	0	$l_1 l_2$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$